



ابتدا مختصات نقطه‌ای به طول  $x = 1$  واقع بر منحنی را از روی خط مماس در این نقطه پیدا می‌کنیم:

$$2y - 3x = 1 \xrightarrow{x=1} 2y - 3 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

چون دوره تناوب تابع  $f$  برابر با ۴ و  $f(1) = 2$ ، پس:

$$f(-7) = f(-7 + 2 \times 4) = f(1) = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

شیب خط  $2y - 3x = 1$  برابر با  $\frac{3}{2}$  است، پس  $f'(1) = \frac{3}{2}$  است.

نکته: اگر  $T$  دوره تناوب تابع  $f$  باشد، آنگاه  $T$  دوره تناوب تابع  $f'$  نیز محسوب می‌شود (حتی ممکن است اعداد کمتر از  $T$  دوره تناوب  $f'$  باشند).

$$\text{پس } f'(-7) = f'(1) = \frac{3}{2}$$

حالا معادله خط مماس بر  $f$  در نقطه  $\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$  را می‌نویسیم:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x + 7) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{25}{2}$$

عرض از مبدأ این خط، عدد  $\frac{25}{2}$  است.

با مشتق ترکیب توابع مواجه‌ایم:

$$g'(x) = (f(x^f - f(x^3 + x^2 + 1)))' \xrightarrow{\text{مشتق مرکب}} \underbrace{(x^f - f(x^3 + x^2 + 1))'}_{*} f'(x^f - f(x^3 + x^2 + 1))$$

برای محاسبه عبارت \* داریم:

$$(x^f - f(x^3 + x^2 + 1))' = f x^3 - \underbrace{(f(x^3 + x^2 + 1))'}_{**}$$

و حالا برای محاسبه عبارت \*\* داریم:

$$(f(x^3 + x^2 + 1))' \xrightarrow{\text{مشتق مرکب}} (3x^2 + 2x)f'(x^3 + x^2 + 1)$$

پس عبارت \* به این صورت است:

$$f x^3 - (3x^2 + 2x)f'(x^3 + x^2 + 1)$$

و لذا داریم:

$$g'(x) = (f x^3 - (3x^2 + 2x)f'(x^3 + x^2 + 1))f'(x^f - f(x^3 + x^2 + 1))$$

حالا برای رسیدن به  $g'(0)$ ، با جایگذاری  $x = 0$  در رابطه اخیر داریم:

$$g'(0) = (0 - (0)f'(1))f'(0 - f(1)) = 0$$

دقت دارید که  $f'(0) = -2$  و  $f'(1) = 1$  که در صورت سؤال داده شده، کاملاً سرکاری است.

$$y' = 3x^2 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} 3 - 1 = 2$$

اگر  $x = 1$  باشد،  $y = -1$  است. معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-1) = 2(x - 1)$$

$$\Rightarrow y + 1 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 3$$

عرض از مبدأ خط مماس برابر با  $-3$  است.

از  $f'(2) = -2g'(2) = 16$ ، نتیجه می‌گیریم که  $f'(2) = 16$  و  $g'(2) = -8$  است. از تساوی  $2f(2) = 5g(2)$  هم دو مقدار  $f(2)$  و  $g(2)$  را برحسب یک پارامتر (مثل  $k$ ) می‌نویسیم.

$$\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{2} \Rightarrow g(2) = 2k, \quad f(2) = 5k$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(2) = 9 &\Rightarrow \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{g^2(2)} = 9 \Rightarrow \frac{16(2k) - (5k)(-8)}{(2k)^2} = 9 \\ &\Rightarrow \frac{72k}{4k^2} = 9 \xrightarrow{k \neq 0} \frac{18}{k} = 9 \Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

اکنون با داشتن  $k = 2$ ، مقدار  $f(2)$  مشخص می‌شود. داریم:

$$f(2) = 5k = 5 \times 2 = 10$$

حال مقدار مشتق  $f^2$  در  $x = 2$  را حساب می‌کنیم:

$$(f^2)'(2) = 2f(2)f'(2) = 2(10)(16) = 320$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2f\left(\frac{x}{3}\right)}}\right)' = \frac{1 \times \sqrt{2f\left(\frac{x}{3}\right)} - \frac{2 \times \frac{1}{3}f'\left(\frac{x}{3}\right)}{2\sqrt{2f\left(\frac{x}{3}\right)}} \times x}{2f\left(\frac{x}{3}\right)} \xrightarrow{x=3} \frac{\sqrt{2f(1)} - \frac{f'(1)}{\sqrt{2f(1)}}}{2f(1)}$$

باتوجه به شکل  $f(1) = 1$  و  $f'(1) = 2$  است:

$$\frac{\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{2(1)} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = 0$$

$$f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x+1}}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

نکته: در مشتق‌گیری از توابع ضربی در نقطه  $x_0$ ، اگر عامل صفرشونده در  $x_0$  از توان ۲ یا بیشتر از ۲ باشد، مشتق بدون محاسبه برابر صفر است.

باتوجه به نکته فوق، مشتق عبارت  $\frac{x^3 \sqrt[3]{x+1}}{x^2+1}$  در  $x=0$  برابر صفر است. چراکه توان  $x$ ، ۳ می‌باشد و وقتی توان عامل صفرکننده بیش از ۱ باشد، مشتق صفر است. پس فقط از عبارت  $\frac{1}{x^2+1}$  مشتق می‌گیریم. این تابع به صورت  $\frac{k}{u}$  است، پس داریم:

$$\left(\frac{k}{u}\right)' = \frac{-k}{u^2} \cdot u' \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}_u' = \frac{-1}{(x^2+1)^2} \times (2x) \xrightarrow{x=0} 0$$

ابتدا ضابطه  $f'$  را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{2x-1} - 7 \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

مشتق  $\frac{f \circ f}{f}$  را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{f(f(x))}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f'(f(x)) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f(f(x))}{f^2(x)}$$

با جایگذاری  $x=5$  داریم:

$$y' = \frac{f'(5) \cdot \overbrace{f'(f(5))}^1 \cdot f(5) - f'(5) \cdot \overbrace{f(f(5))}^1}{f^2(5)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)(2)(1) - \left(\frac{4}{3}\right)(-5)}{1^2} = \frac{8}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$$

شیب خط قاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{شیب خط قاطع} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

شیب خط مماس باید  $\frac{1}{3}$  باشد.

$$\text{شیب خط مماس} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x+1 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که  $x = -2$  ریشه صورت تابع داده شده است؛ پس کافی است فقط از صورت کسر مشتق بگیریم. داریم:

$$\frac{3x^2 + 1}{f(\tan \frac{\pi}{2x})} \xrightarrow{x=-2} \frac{13}{f(\tan(-\frac{\pi}{4}))} = \frac{13}{f(-1)} = \frac{13}{\frac{2 - (-1)^2}{1 + (-1)^2}} = \frac{13}{\frac{1}{2}} = 26$$

ابتدا معادله خط مماس رسم شده را می‌نویسیم:  $y = mx$ .

$$m = f'(3) = 2x = 6 \Rightarrow y = 6x$$

با جایگذاری  $x = 3$  در معادله این خط به نقطه  $(3, 18)$  می‌رسیم که باید در ضابطه تابع  $f(x) = x^2 + k$  هم صدق کند:

$$18 = 9 + k \Rightarrow k = 9$$

می‌دانیم:

$$S_{O\hat{A}B} = \frac{OA \times OB}{2} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۴ \times OB}{2} \Rightarrow OB = ۵ \Rightarrow B(۵, ۰)$$

شیب پاره‌خط  $AB$  (که در واقع همان خط مماس بر منحنی  $f$  در  $x = ۳$  است) را به کمک دو نقطه  $A(۰, ۴)$  و  $B(۵, ۰)$  حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۰ - ۴}{۵ - ۰} = \frac{-۴}{۵} \Rightarrow f'(۳) = -\frac{۴}{۵}$$

ضمناً باتوجه به شکل، می‌دانیم که:  $f(۳) = ۳$ .

حالا با داشتن  $f(۳)$  و  $f'(۳)$  به محاسبه حد  $\frac{۰}{۰}$  داده‌شده به کمک قاعده هسپیتال می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow ۳} \frac{f''(x) - ۹}{x - ۳} = \lim_{x \rightarrow ۳} \frac{۲f(x)f'(x)}{۱} = ۲f(۳)f'(۳) = ۲(۳)\left(\frac{-۴}{۵}\right) = \frac{-۲۴}{۵} = -۴/۸$$

عبارت خواسته شده را ساده تر می کنیم:

$$\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = \frac{f'g - g'f}{fg} = \frac{\left(\frac{f}{g}\right)' \times g^2}{f \times g} = \frac{\left(\frac{f}{g}\right)' \times g}{f} = \left(\frac{f}{g}\right)' \times \left(\frac{g}{f}\right)$$

برای محاسبه  $\left(\frac{f}{g}\right)'$  در نقطه  $x = ۴$ ، ابتدا  $\frac{f}{g}$  را تشکیل می دهیم:

$$\frac{f}{g} = \frac{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{1}}{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \sqrt{x - \sqrt{x}} \times \sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{x^2 - x}$$

پس:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = (\sqrt{x^2 - x})' = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} \xrightarrow{x=۴} \frac{7}{2\sqrt{12}}$$

محاسبه  $\left(\frac{g}{f}\right)$  در نقطه  $x = ۴$  هم که بسیار ساده است.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(۴) = \frac{g(۴)}{f(۴)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

پس داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \times \left(\frac{g}{f}\right) \xrightarrow{x=۴} \frac{7}{2\sqrt{12}} \times \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{7}{24}$$

بهتر است در همین ابتدا، رادیکال را به صورت توانی بنویسیم:

$$f(x) = \left( \frac{2x - 5}{9 - 4x^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

پس طبق قاعده مشتق توانی داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{2x - 5}{9 - 4x^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{2x - 5}{9 - 4x^2} \right)'$$

برای محاسبه مشتق کسر  $\frac{2x - 5}{9 - 4x^2}$  هم از قاعده مشتق تقسیم استفاده می‌کنیم:

$$y = \frac{2x - 5}{9 - 4x^2} \Rightarrow y' = \frac{2(9 - 4x^2) - (-8x)(2x - 5)}{(9 - 4x^2)^2} = \frac{8x^2 - 40x + 18}{(9 - 4x^2)^2}$$

پس داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{2x - 5}{9 - 4x^2}} \times \frac{8x^2 - 40x + 18}{(9 - 4x^2)^2}$$

$$f'(3) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{-27}} \times \frac{-30}{(-27)^2} = \frac{1 \times \cancel{30}^1}{27 \times \cancel{27}_9} = \frac{1}{243}$$

اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt[3]{x} \times \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt[3]{x}$$

حالا مشتق می‌گیریم:

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

اگر  $x = 8$  باشد، داریم:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$



برای محاسبه شیب خط مماس در نقطه  $x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، باید  $f'(\frac{-2\sqrt{3}}{3})$  را حساب کنیم. با کمی دقت، متوجه خواهید شد که عبارت  $(3x^2 - 4)$  از تابع  $f(x)$ ، در این نقطه، عامل صفرشونده محسوب می‌شود. ببینید:

$$y = 3x^2 - 4 \xrightarrow{x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}} 3\left(\frac{4}{3}\right) - 4 = 0$$

پس برای محاسبه مشتق، کافی است فقط از عامل صفرشونده مشتق بگیریم و در بقیه عبارت‌ها ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x)(3x - 1)^2 \\ f'\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) &= \left(6\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\right)\left(3\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) - 1\right)^2 = (-4\sqrt{3})(-2\sqrt{3} - 1)^2 \\ &= (-4\sqrt{3})(13 + 4\sqrt{3}) = -52\sqrt{3} - 48 \end{aligned}$$

با مقایسه این عدد با  $a\sqrt{3} + b$ ، واضح است که  $a = -52$  و  $b = -48$  و  $a + b = -100$  می‌باشد.

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم: ( $x \neq 1$ )

$$f(x) = \frac{(x-1)}{x-1}(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = \frac{(x^2-1)}{x-1}(x^2+1)(x^4+1) = \frac{x^4-1}{x-1}(x^4+1) = \frac{x^8-1}{x-1}$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \frac{8x^7(x-1) - (x^8-1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

حد به حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  است، پس از هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 5\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{7x-1} - 3} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \frac{5}{2\sqrt{x}}}{\frac{7}{3\sqrt[3]{(7x-1)^2}}} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{\frac{7}{27}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{27}} = \frac{81}{28}$$

پس:

$$85 - 28L = 85 - 28\left(\frac{81}{28}\right) = 85 - 81 = 4$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$(2x + 4)f'(x^2 + 4x - 1) = 2g'(2x + 1)$$

$$\xrightarrow{x=1} 6f'(4) = 2g'(3) \Rightarrow \frac{f'(4)}{g'(3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تابع  $f$  در  $x = 0$  پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = b$$

به محاسبه حد فوق می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + a^3} - a}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(x + a^3)^{-\frac{2}{3}}}{1} \\ &= \frac{1}{3}(a^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(a)^{-2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow b = \frac{1}{3a^2} \end{aligned}$$

در تابع درجه دوم اگر  $f'(b) = -f'(c)$  باشد،  $b$  و  $c$  نسبت به محور تقارن تابع درجه دوم، متقارن هستند؛ پس  $x = \frac{b+c}{2} = -4$  محور تقارن تابع است، پس:

$$\frac{-a}{2} = -4 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow f(1) = 1 + 8 + 3 = 12$$